Epreuve 08-09

EXERCICE 1

1/ Rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $1 \leq rg\, A \leq 3$

- $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 - (1-a) + (1-a) = 0$

donc $rg\, A \neq 3$

- les mineurs d'ordre 2 extraits de A sont $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$

Si $a \neq 1$ alors $rg\, A = 2$

Si $a = 1$ alors $rg\, A \neq 2 \Rightarrow rg\, A = 1$

2/. $\det S_a = \det A = 0 \Rightarrow$ le système S_a n'est pas de Cramer $\forall a \in \mathbb{R}$.

- Resolution du système : les 2 equations (1) et (3) sont egale (equivalente) donc le système se reduit au système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ ax + y + z = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow (1-a)x = 1$

1°cas si $a \neq 1$ alors $x = \frac{1}{1-a}$ et $z = -y - \frac{a}{1-a}$

donc $S = \left\{ \left(\frac{1}{1-a}, y ; -y - \frac{a}{1-a} \right) ; y \in \mathbb{R} \right\}$

2°cas : si $a = 1$ alors l'equation $(1-a)x = 1$ devient : $0.x = 1$ impossible donc $S = \emptyset$

ETUDUP .com

Exercice 2 $f(x,y) = (x-y, y-x)$

1/ $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = ((x+x')-(y+y') ; (y+y')-(x+x'))$

$= (x-y+x'-y', y-x+y'-x') = (x-y, y-x) + (x'-y', y'-x') = f(x,y) + f(x',y')$

$f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha x) = \alpha(x-y, y-x) = \alpha f(x,y)$

2/ • Soit $(x,y) \in \ker f$ alors $f(x,y) = (0,0)$ càd $(x-y, y-x) = (0,0)$

$\begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y$ d'où $(x,y) = (x,x) = x(1,1)$

Ainsi $\ker f = \text{Vect}(u(1,1))$

• f n'est pas injective car $\ker f \neq \{(0,0)\}$

• Soit $(x,y) \in \text{Im} f$ alors $f(x,y) = (x-y, y-x) = (x-y)(1,-1)$

donc le vecteur $v(1,-1)$ engendre $\text{Im} f$

Ainsi $\text{Im} f = \text{Vect}(v(1,-1))$

3/ • On $\dim \ker f + \dim \text{Im} f = 1+1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

• Soit $(x,y) \in \ker f \cap \text{Im} f$ alors $(x,y) \in \ker f$ et $(x,y) \in \text{Im} f$

d'où $f(x,y) = (0,0)$ et $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ / $(x,y) = \alpha(1,-1)$

càd $x=y$ et $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \end{cases}$ d'où $\alpha = -\alpha \Rightarrow 2\alpha = 0$

$\alpha = 0$

d'où $(x,y) = (0,0)$

Ainsi $\ker f \cap \text{Im} f = \{(0,0)\}$ d'où $\text{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}^2$

4/ On a $f(e_1) = f(1,0) = (1,-1) = e_1 - e_2$

$f(e_2) = f(0,1) = (-1,1) = -e_1 + e_2$

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ETUDUP .com

ETUDUP .com

Probleme $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_{a,b} = \{ M_{a,b} = aI + bM \ , \ a, b \in \mathbb{R} \}$

1% • Soit $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ 2 matrice de $E_{a,b}$ alors

$M_{a,b} + M_{a',b'} = (aI + bM) + (a'I + b'M) = (a+a')I + (b+b')M$

$= M_{a+a', b+b'} \in E_{a,b}$

• $\alpha M_{a,b} = \alpha (aI + bM) = (\alpha a) I + (\alpha b) M = M_{\alpha a, \alpha b} \in E_{a,b}$

• Par definition, la famille $B = \{I, M\}$ est une famille generatrice de $E_{a,b}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / $\alpha I + \beta M = 0$

alors $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta & 2\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

la famille B est libre donc base de $E_{a,b} \Rightarrow \dim E_{a,b} = 2$

2% • Soit $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} M$ alors $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

donc $(x,y,z) = (0,0,z) = z(0,0,1) \Rightarrow \operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}(u(0,0,1))$

$B_1 = \{u(0,0,1)\}$ base de $\operatorname{Ker} M$

• On a $\dim \operatorname{Im} M = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} M = 3 - 1 = 2$

• Soit $(x',y',z') \in \operatorname{Im} M$ alors $\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ / $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x + 2y = x' \\ x = y' \\ 0 = z' \end{cases} \Rightarrow (x',y',z') = (-2x+2y, x, 0) = x(-2,1,0) + y(2,0,0)$

donc $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(v(-2,1,0), w(2,0,0))$

• $B_2 = \{v(-2,1,0) ; w(2,0,0)\}$ base de $\operatorname{Im} M$

• M n'est pas inversible car M n'est pas injective ($\operatorname{Ker} M \neq 0$)

3/ $P(X) = \det(M - XI) = \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -1-X & 2 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2+X-2) = -X(X-1)(X+2)$

4/ $P(X) = 0 \Leftrightarrow -X=0$ ou $X-1=0$ ou $X+2=0 \Leftrightarrow X=0$ ou $X=1$ ou $X=-2$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$

5/ Sous espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2}, E_{λ_3}

- $(x,y,z) \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow (M - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,z) = z(0,0,1)$

d'où $E_{\lambda_1} = \text{Vect}(u(0,0,1))$

- $(x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow (M - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y = 0 \\ x-y = 0 \\ y-z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z \Rightarrow (x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$

d'où $E_{\lambda_2} = \text{Vect}(v(1,1,1))$

- $(x,y,z) \in E_3 \Leftrightarrow (M - \lambda_3 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ x+2y = 0 \\ y+2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -y/2 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = \left(-2y, y, -\frac{y}{2}\right) = -\frac{y}{2}(4,-2,1)$

d'où $E_{\lambda_3} = \text{Vect}(w(4,-2,1))$

6/ M est diagonalisable car $\dim E_{\lambda_i} = 1 =$ ordre de multiplicité de λ_i

7/ $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ $f_1 = (4,-2,1)$ $f_2 = (1,1,1)$ $f_3 = (0,0,1)$

- $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta + = 0 & (1) \\ -2\alpha + \beta = 0 & (2) \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & (3) \end{cases}$

$(1)+2(2) \Rightarrow 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$(1) \Rightarrow \alpha = 0$

$(3) \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow$ B/Q libre

donc B' base de $\mathbb{R}^3$

- $P = P(B \to B') = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det P = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\text{Com}P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\det} {}^t(\text{Com}P) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

- $M' = \text{Mat}_{(B')}(B') = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8/ $M = PM'P^{-1} \Rightarrow M^n = P(M')^n P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & -(-2)^n & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2+4(-2)^n & 4-4(-2)^n & 0 \\ 2-2(-2)^n & 4+2(-2)^n & 0 \\ 2+(-2)^n & 4-(-2)^n & 0 \end{pmatrix}$

ETUDUP .com

et encore plus..